数理解析研究所講究録 第2125巻 2019年 1-6

Algebraic structures on $\mathbb{R}^+$ for means

茨城大学・工学部　阿部　敏一

Toshikazu Abe, College of Engineering, Ibaraki University

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

1　abstract

正の実数全体を $\mathbb{R}^+$, $n\times n$ 正定値行列全体を $\mathbb{P}_n$ で表すことにする．ここでいう正定置行列は可逆なものだけを考えているとする．特に，$\mathbb{P}_1=\mathbb{R}_+$ である．$\mathbb{P}_n$ 上の二項演算のうち，いくつかの条件を満たすものを mean と呼ぶ．後の例に見るように幾つかの mean は可換半群の代数的中点，もしくはジャイロ可換ジャイロ群の代数的中点とみなす事が出来る．本稿では特に，$\mathbb{R}^+$ 上の mean がどのような二項演算の代数的中点とみなす事ができるかに注目する．

2　正定値行列

$n\times n$ 行列全体を $M_n(\mathbb{C})$ で表す．$A\in M_n(\mathbb{C})$ が**半正定値行列**であるとは，自己随伴であり，かつ任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$ に対して，$\boldsymbol{x}^*A\boldsymbol{x}\geq 0$ が成立することをいう．A が半正定値であることを $A\geq O$ で表す．半正定値行列のうち可逆なものを特に**正定値行列**という．正定値行列全体 $\mathbb{P}_n$ は和やスカラー積について閉じていないため，線形空間として $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ の部分空間にはならないが，凸錐であることが知られている．また，$A\geq B\iff A-B\geq O$ によって $\mathbb{P}_n$ 上の半順序 $\geq$ が定まる．

3　可換群・可換半群・ジャイロ可換ジャイロ群

二項演算 $\circ: S\times S\to S;\ (a,b)\mapsto a\circ b$ が定義された空でない集合 $(S,\circ)$ を **magma** という．Magma $(S,\circ)$ からそれ自身への全単射 $\varphi: S\to S$ で二項演算 $\circ$ を保存するも

の，すなわち $\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$ が成立するものを magma $(S, \circ)$ の**自己同型写像**という．

Magma $(S, \circ)$ の元 $e \in S$ が，任意の $a \in S$ に対して，$e \circ a = a \circ e = a$ を満たすとき，e を $(S, \circ)$ の**単位元**という．Magma がいつでも単位元を持つとは限らない．単位元が存在する magma を **groupoid** と呼ぶ．

$(S, \circ)$ が単位元 $e \in S$ を持つ groupoid であるとき，$x \in S$ に対して $x \circ y = y \circ x = e$ となる $y \in S$ が存在すれば，それを x の**逆元**という．一般に $x \in S$ に対して逆元が存在するとは限らないし，存在してもそれがユニークであるとは限らない．

$(S, \circ)$ を magma とする．任意の $x \in S$ に対して，$y \circ y = x$ となる $y \in S$ がユニークに存在するとき，$(X, \circ)$ は **uniquely 2- divisible** であるという．また，このとき y を x の $half$ であるという．本稿では二項演算を $\oplus$ という記号で表すことが多い．$(S, \oplus)$ が uniquely 2- divisible であるとき，$x \in S$ の half を $\dfrac{1}{2} \otimes x$ という記号で表すことにする．

3.1　半群としての中点

Definition 1. Magma $(X, \oplus)$ が次の公理 (b1) から (a2) を満たすとき，$(X, \oplus)$ は**可換半群**であるという．

(b1)　結合法則を満たす．

(b2)　可換である．

Definition 2. $(X, \oplus)$ を uniequly 2-divisible な可換半群とする．このとき，$a, b \in X$ に対して，$\frac{1}{2} \otimes (a \oplus b)$ を**半群としての中点**と呼ぶことにする．

3.2　ジャイロ群としての中点

Definition 3. Magma $(X, \oplus)$ が**ジャイロ可換ジャイロ群**であるとは，以下の公理 (c1) から (c6) を満たす場合をいう．

(c1)　単位元 e を持つ．

(c2)　全ての $x \in X$ に対して，逆元が存在する．

(c3)　任意の $a, b, c \in X$ に対して，$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus d$ となる $d \in X$ がユニークに存在する．この d を $d = \mathrm{gyr}[a, b]c$ で表す．

(c4)　任意の $a, b \in X$ に対して，c に $\mathrm{gyr}[a, b]c$ を対応させる写像 $\mathrm{gyr}[a, b] : X \to X$ は

自己同型写像である．

(c5)　任意の $a, b \in X$ に対して，$\mathrm{gyr}[a \oplus b, b] = \mathrm{gyr}[a, b]$．

(c6)　任意の $a, b \in X$ に対して，$a \oplus b = \mathrm{gyr}[a, b](b \oplus a)$．

Definition 4. ジャイロ群 $(X, \oplus)$ に対して，新たな二項演算 $\boxplus : X \times X \to X$ を

$$a \boxplus b = a \oplus \mathrm{gyr}[a, \ominus b]b$$

で定義する．この二項演算 $\boxplus$ を $(G, \oplus)$ の **coaddition** という．

Definition 5. $(X, \oplus)$ を uniequly 2-divisible なジャイロ可換ジャイロ群とする．このとき，$a, b \in X$ に対して，$\frac{1}{2} \otimes (a \boxplus b)$ を**ジャイロ群としての中点**と呼ぶことにする．

3.3　可換半群・ジャイロ可換ジャイロ群と可換群

ジャイロ可換ジャイロ群，および可換半群はともに可換群の一般化である．可換半群は可換群の結合法則をそのままに，単位元と逆元の存在を弱めたものである．一方，ジャイロ可換ジャイロ群は単位元と逆元の存在はそのままに，結合法則と可換則に関する公理をより弱い公理に置き換えたものである．したがって，可換群からみて，それぞれ別方向への一般化を図ったものである．次のことは定義よりあきらかである．

Theorem 1. $(S, \circ)$ を *magma* とする．「$(S, \circ)$ が可換群である」ことと「$(S, \circ)$ が可換半群かつジャイロ可換ジャイロ群である」ことは同値である．

$(S, \circ)$ が uniquely 2-divisible な可換半群である場合，ジャイロ群といしての中点と可換半群としての中点が同じものであることがわかる．これを**群としての中点**ということにする．以降，ジャイロ群としての中点，半群としての中点，群としての中点を区別しない場合，単に**代数的中点**と呼ぶことにする．

以上のように定義された代数的中点はいずれも中点と呼ぶにふさわしい性質を持っていることがわかる．特にジャイロ可換ジャイロ群の場合については [3] を参照されたい．

4　Mean と代数構造

Definition 6. $M : \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$，$(a, b) \mapsto M(a, b)$ が次の条件 (M1) から (M5) を満たすとき，M を $\mathbb{P}_n$ 上の mean であるという．

(M1) 任意の $a, b \in \mathbb{P}_n$ に対して，「$a \leq b \Rightarrow a \leq M(a, b) \leq b$」．

(M2) 任意の $a, b \in \mathbb{P}_n$ に対して，$M(a,b) = M(b,a)$.
(M3) 二変数写像 $M(x,y)$ は各変数について単調増加.
(M4) 二変数写像 $M(x,y)$ は各変数について連続.
(M5) 任意の $a, b \in \mathbb{P}_n$ と n 次正則行列 x に対して，$M(x^*ax, x^*bx) = x^*M(a,b)x$.

4.1 算術平均

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2} \qquad (a, b \in \mathbb{P}_n)$$

とすると，A は $\mathbb{P}_n$ 上の mean であり，これを**算術平均**（**arithmetic mean**）とよぶ.

Example 1. $\mathbb{P}_n$ 上の二項演算 $\oplus_A$ を通常の和によって定める．すなわち，

$$a \oplus_A b = a + b \qquad (a, b \in \mathbb{P}_n)$$

とすると，$(\mathbb{P}_n, \oplus_A)$ は *uniequly 2-divisible* な可換半群である．ここで，$(\mathbb{P}_n, \oplus_A)$ の可換半群としての代数的中点は算術平均と一致する．すなわち，

$$\frac{1}{2} \otimes_A (a \oplus_A b) = \frac{a+b}{2} = A(a,b) \qquad (a, b \in \mathbb{P}_n).$$

4.2 調和平均

$$H(a,b) = 2(a^{-1} + b^{-1})^{-1} \qquad (a, b \in \mathbb{P}_n)$$

とすると，H は $\mathbb{P}_n$ 上の mean であり，これを**調和平均**（**harmonic mean**）とよぶ.

Example 2. $(\mathbb{P}_n, \oplus_H)$ を

$$a \oplus_H b = (a^{-1} + b^{-1})^{-1} \qquad (a, b \in \mathbb{P}_n)$$

によって定めると，*uniequly 2-divisible* な可換半群になる．ここで，$(\mathbb{P}_n, \oplus_H)$ の可換半群としての代数的中点は調和平均と一致する．すなわち，

$$\frac{1}{2} \otimes_H (a \oplus_H b) = 2(a^{-1} + b^{-1})^{-1} = H(a,b) \qquad (a, b \in \mathbb{P}_n).$$

4.3　幾何平均

$$G(a,b) = a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}b^{-1}a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}} \qquad (a,b \in \mathbb{P}_n)$$

とすると，G は $\mathbb{P}_n$ 上の mean であり，これを**幾何平均（geometric mean）**とよぶ．特に，$n=1$ の場合は積について可換であることから

$$G(a,b) = \sqrt{ab} \qquad (a,b \in \mathbb{R}^+)$$

とかける．

Example 3. $(\mathbb{P}_n, \oplus_G)$ を

$$a \oplus_G b = a^{\frac{1}{2}}ba^{\frac{1}{2}} \qquad (a,b \in \mathbb{P}_n)$$

によって定めると，*uniequly 2-divisible* なジャイロ可換ジャイロ群になる．ここで，$(\mathbb{P}_n, \oplus_G)$ のジャイロ可換ジャイロ群としての代数的中点は幾何平均と一致する．すなわち，

$$\frac{1}{2} \otimes_G (a \boxplus_G b) = a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}b^{-1}a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}} = G(a,b) \qquad (a,b \in \mathbb{P}_n).$$

特に，$n=1$ の場合は

$$a \oplus_G b = ab \qquad (a,b \in \mathbb{R}^+)$$

である．したがって，$(\mathbb{R}^+, \oplus_G)$ は可換群であり，幾何平均は群の中点とみなす事が出来る．

4.4　Max 平均

$n=1$ の場合のみ考える．

$$\mathrm{Max}(a,b) = \max\{a,b\}$$

とすると，Max は $\mathbb{R}^+$ 上の mean であり，これを **MAX 平均**とよぶことにする．

Example 4. $(\mathbb{P}_n, \oplus_M)$ を

$$a \oplus_M b = \max\{a,b\} \qquad (a,b \in \mathbb{R}^+)$$

によって定めると，*uniequly 2-divisible* な可換半群になる．ここで，$(\mathbb{R}^+, \oplus_M)$ の可換半群としての代数的中点は *MAX* 平均と一致する．すなわち，

$$\frac{1}{2} \otimes_M (a \oplus_M b) = \max\{a, b\} \qquad (a, b \in \mathbb{R}^+).$$

特に，$(\mathbb{R}^+, \oplus_M)$ は消去律（*cancellation property*）をみたさないような半群である．

5　$\mathbb{R}^+$ 上の代数構造と mean

筆者はこれらの結果から次のような予想を立てた．

conjecture 1. $(\mathbb{R}^+, \oplus)$ が *uniquely 2-divisible* なジャイロ可換ジャイロ群であり，その代数的中点が $\mathbb{R}^+$ 上の *mean* M と対応している，すなわち，

$$M(a, b) = \frac{1}{2} \otimes (a \boxplus b) \qquad (a, b \in \mathbb{R}^+)$$

ならば，$(\mathbb{R}^+, \oplus)$ は可換群である．

この予想に対し，部分的な回答として以下のような結果を示すことができた．

Theorem 2. $(\mathbb{R}^+, \oplus)$ が *uniquely 2-divisible* なジャイロ可換ジャイロ群であり，その代数的中点が $\mathbb{R}^+$ 上の *mean* M と対応している，すなわち，

$$M(a, b) = \frac{1}{2} \otimes (a \boxplus b) \qquad (a, b \in \mathbb{R}^+)$$

とする．このとき，$(\mathbb{R}^+, \oplus)$ の *subgyrogroup* で群 $(\mathbb{R}, +)$ と同型なものが存在する．

筆者の予想 conjecture 1 は，この subgyrogroup が $(\mathbb{R}^+, \oplus)$ そのものではないかというものである．

参考文献

[1] T. Abe and O. Hatori, *Generalized gyrovector spaces and a Mazur-Ulam theorem*, Publ. Math. Debrecen, **87** (2015), 393–413

[2] J. Lawson and Y. Lim *Symmetric sets with midpoints and algebraically equivalent theories*, Results Math., **46** (2004), 37–56

[3] A. A. Ungar, *Analytic Hyperbolic Geometry and Albert Einstein's Special Theory of Relativity*, World Scientific, (2008)